

Метод рационализации

Метод рационализации — это весьма мощная процедура, позволяющая в определённых случаях упростить неравенство и свести его к *рациональному* неравенству (которое решается методом интервалов).

Предположим, что имеется *монотонно возрастающая* функция $f(x)$. Пусть числа a и b принадлежат области определения данной функции. Тогда справедливы следующие утверждения.

- Неравенство $f(a) > f(b)$ эквивалентно неравенству $a > b$; иными словами, неравенство $f(a) - f(b) > 0$ эквивалентно неравенству $a - b > 0$.
- Аналогично, неравенство $f(a) - f(b) < 0$ эквивалентно неравенству $a - b < 0$.

Сформулируем оба этих утверждения короче: *если $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то разность $f(a) - f(b)$ совпадает по знаку с разностью $a - b$.*

Как работает эта идея применительно к решению неравенств? Пусть, например, имеется неравенство

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(b)} > 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — монотонно возрастающие функции. Тогда разность $f(x) - f(a)$ можно заменить разностью $x - a$ (того же знака), а разность $g(x) - g(b)$ можно заменить разностью $x - b$ (того же знака). Получим рациональное неравенство

$$\frac{x - a}{x - b} > 0, \quad (2)$$

решаемое методом интервалов.

При этом неравенство (2) является *следствием* неравенства (1). Это означает, что неравенство (2) содержит все решения неравенства (1) и, возможно, некоторые другие решения. Чтобы отфильтровать лишние решения, нужно множество решений неравенства (2) пересечь с областью определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Давайте рассматривать конкретные задачи — они дадут лучшее представление о том, как нужно применять метод рационализации. Начнём с задачи, разобранный в конце предыдущей статьи «[Логарифмические уравнения и неравенства](#)».

Задача 1. Решить неравенство:

$$\log_{x^2}(x + 2) < 1. \quad (3)$$

Решение. Перейдём в неравенстве (3) к какому-нибудь постоянному основанию. Например, к основанию 10:

$$\frac{\lg(x + 2)}{\lg x^2} < 1.$$

Чтобы применить метод рационализации, нам в правой части необходим ноль. Переносим единицу влево:

$$\frac{\lg(x + 2)}{\lg x^2} - 1 < 0,$$

или

$$\frac{\lg(x + 2) - \lg x^2}{\lg x^2} < 0.$$

В числителе получилась разность логарифмов — это как раз то, что нам нужно. Не хватает разности логарифмов в знаменателе. Но такую разность мы легко организуем:

$$\lg x^2 = \lg x^2 - 0 = \lg x^2 - \lg 1.$$

Таким образом, наше неравенство принимает вид:

$$\frac{\lg(x+2) - \lg x^2}{\lg x^2 - \lg 1} < 0. \tag{4}$$

До сих пор мы совершали равносильные преобразования, так что неравенство (4) равносильно исходному неравенству (3).

Теперь мы замечаем, что в силу монотонного возрастания функции $y = \lg x$ числитель совпадает по знаку с разностью $(x+2) - x^2$, а знаменатель совпадает по знаку с разностью $x^2 - 1$. Поэтому неравенство (4) равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{x+2-x^2}{x^2-1} < 0, \\ x+2 > 0, \\ x^2 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Преобразуем первое неравенство системы (5):

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} > 0,$$

и решаем его методом интервалов:

$$x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad x > 2. \tag{6}$$

Решения второго и третьего неравенств системы (5) — это множество

$$-2 < x < 0, \quad x > 0. \tag{7}$$

Остаётся пересечь множества (6) и (7).

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Как видите, метод рационализации избавляет нас от необходимости рассматривать два случая (основание логарифма больше/меньше единицы). И чем сложнее неравенство, тем более ощутимыми становятся преимущества метода рационализации.

Задача 2. (МГУ, мехмат, 1998) Решить неравенство:

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0. \tag{8}$$

Решение. Переходим к основанию 10:

$$\frac{\lg(10x^2 + x - 2)}{\lg \frac{2x+2}{5x-1}} \leq 0.$$

Вычитаем в числителе и знаменателе $\lg 1 = 0$:

$$\frac{\lg(10x^2 + x - 2) - \lg 1}{\lg \frac{2x+2}{5x-1} - \lg 1} \leq 0. \tag{9}$$

Неравенство (9) равносильно исходному неравенству (8). Вместе с тем ввиду монотонного возрастания функции $y = \lg x$ неравенство (9) равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(10x^2 + x - 2) - 1}{\frac{2x+2}{5x-1} - 1} \leq 0, \\ 10x^2 + x - 2 > 0, \\ \frac{2x+2}{5x-1} > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Преобразуем первое неравенство системы (10):

$$\frac{10x^2 + x - 3}{\frac{3-3x}{5x-1}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{10(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{5})}{\frac{3(x-1)}{5x-1}} \leq 0,$$

и решаем его методом интервалов:

$$x \leq -\frac{3}{5}, \quad \frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{2}, \quad x > 1. \quad (11)$$

Решения второго неравенства системы (10):

$$x < -\frac{1}{2}, \quad x > \frac{2}{5}. \quad (12)$$

Решения третьего неравенства системы (10):

$$x < -1, \quad x > \frac{1}{5}. \quad (13)$$

Остаётся пересечь множества (11), (12) и (13).

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (\frac{2}{5}; \frac{1}{2}] \cup (1; +\infty)$.

В рассмотренной задаче метод рационализации весьма серьёзно выигрывает в эффективности. Попробуйте решить данное неравенство, рассматривая два случая сравнения с единицей основания логарифма, — и сравните объём проделанной работы.

Метод рационализации можно применять не только к логарифмическим неравенствам.

Задача 3. (МГУ, ДВИ, 2011) Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} < 1.$$

Решение. Для начала выполним равносильные преобразования:

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-1} < 0.$$

Вследствие монотонного возрастания функции $y = \sqrt{x}$ полученное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{(1-3x)-(2+x)}{(2+x)-1} < 0, \\ 1-3x \geq 0, \\ 2+x \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{4x+1}{x+1} > 0, \\ x \leq \frac{1}{3}, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Эта система решается легко.

Ответ: $[-2; -1) \cup (-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}]$.

Задача 4. (МГУ, мехмат, 2005) Решить неравенство:

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos \frac{2x-7}{4} - \cos \frac{x-5}{4}} \geq 0. \quad (14)$$

Решение. Заметим, что функция $y = \cos x$ монотонно возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$ (рис. 1). Этот факт пригодится нам при решении задачи.

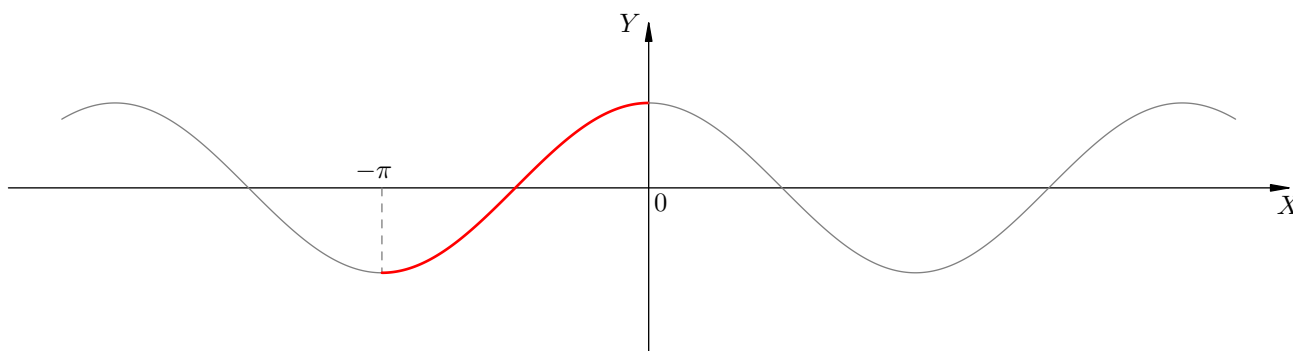


Рис. 1. График функции $y = \cos x$

Решения уравнения (14) удовлетворяют условию $5-x^2 \geq 0$, то есть

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}. \quad (15)$$

Для аргумента первого косинуса в знаменателе (14) имеем тогда следующую оценку:

$$\frac{-2\sqrt{5}-7}{4} \leq \frac{2x-7}{4} \leq \frac{2\sqrt{5}-7}{4}.$$

Замечаем, что:

$$\begin{aligned} \frac{-2\sqrt{5}-7}{4} &= \frac{-\sqrt{20}-7}{4} > \frac{-\sqrt{25}-7}{4} = \frac{-5-7}{4} = -3 > -\pi; \\ \frac{2\sqrt{5}-7}{4} &= \frac{\sqrt{20}-\sqrt{49}}{4} < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из неравенства (15) следует неравенство

$$-\pi < \frac{2x-7}{4} < 0. \quad (16)$$

Получим аналогичную оценку для аргумента второго косинуса. Из (15) следует, что

$$\frac{-\sqrt{5}-5}{4} \leq \frac{x-5}{4} \leq \frac{\sqrt{5}-5}{4}.$$

С одной стороны,

$$\frac{-\sqrt{5}-5}{4} > \frac{-3-5}{4} = -2 > -\pi.$$

С другой стороны,

$$\frac{\sqrt{5}-5}{4} < 0.$$

Следовательно,

$$-\pi < \frac{x-5}{4} < 0. \quad (17)$$

Ввиду оценок (16), (17) и монотонного возрастания косинуса на отрезке $[-\pi; 0]$ исходное неравенство (14) равносильно неравенству

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\frac{2x-7}{4}-\frac{x-5}{4}} \geq 0,$$

то есть

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{x-2} \geq 0.$$

Заметим ещё, что в силу (15) имеем:

$$3-x+\sqrt{5-x^2} \geq 3-x \geq 3-\sqrt{5} > 0.$$

Это позволяет использовать для упрощения неравенства полезный приём: «домножим на сопряжённое», то есть умножим числитель и знаменатель на $3-x+\sqrt{5-x^2}$. Получим цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{(3-x-\sqrt{5-x^2})(3-x+\sqrt{5-x^2})}{(x-2)(3-x+\sqrt{5-x^2})} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(3-x)^2-(5-x^2)}{(x-2)(3-x+\sqrt{5-x^2})} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x+4}{(x-2)(3-x+\sqrt{5-x^2})} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x-2} \geq 0 \end{aligned}$$

(заключительный переход совершён на множестве (15) и обусловлен положительностью выражения $3-x+\sqrt{5-x^2}$ на этом множестве). Последнее неравенство приводится к виду

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-2} \geq 0$$

и легко решается методом интервалов:

$$1 \leq x < 2, \quad x > 2. \quad (18)$$

Остаётся пересечь множество (18) с множеством (15).

Ответ: $[1; 2) \cup (2; \sqrt{5}]$.

В следующей статье «Задача СЗ на ЕГЭ по математике» вы найдёте дальнейшие применения метода рационализации.