**Решения алгебраических задач**

Применение метода тригонометрической подстановки при решении задач

Решение уравнений

Иррациональные уравнения

Рациональные уравнения

Показательные уравнения

Решение систем

Доказательство неравенств

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений

функции

задач с параметрами

Решение

**Метод замены переменной при решении задач**

Переход к новым обозначениям, замена неизвестных – существенный прием и метод, который применяется при решении самых различных задач как элементарной, так и высшей математики. Очень важно, чтобы этот прием и метод был прочно усвоен и освоен в школе, так как идея замены переменной является сквозной и в том или ином виде фигурирует практически во всех разделах школьной математики.

Существуют два подхода к определению метода замены переменной. Если уравнение  удалось преобразовать к виду , то нужно ввести новую переменную , решить уравнение , а затем рассмотреть совокупность уравнений



где  ***–*** корни уравнения . Чтобы при замене не потерять корней, достаточно убедиться, что каждому значению  из рассматриваемой области соответствует хотя бы одно значение , удовлетворяющее равенству .

В отличие от описанного выше метод равносильной замены требует нахождения множества значений переменной . В данном случае накладывается требование: каждому значению  из рассматриваемой области соответствует ровно одно значение переменной , удовлетворяющее равенству . Такой подход ведет к сохранению области определения исходного уравнения и не требует перехода к совокупности.

Подобные замены порой существенно упрощают решение. Замена переменных и переход к новым обозначениям облегчают выкладки и делают громоздкое алгебраическое выражение компактным и обозримым. Вот почему следует приучать школьников при решении задач не торопиться начинать преобразования: пусть они сначала посмотрят, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. При этом не стоит забывать, что, во-первых, далеко не всегда замена бывает столь уж необходима. Во-вторых, если приходится прибегать к замене неизвестной, то стоит сразу подобрать ее так, чтобы она вбирала в себя по возможности большее количество неприятных деталей, затрудняющих решение.

**Решение уравнений**

* 1. **Иррациональные уравнения**

Иррациональные уравнения часто встречаются на вступительных экзаменах по математике, так как с их помощью легко диагностируется знание таких понятий, как равносильные преобразования, область определения и другие. Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. Эквивалентность не нарушается при возведении обеих частей в нечетную степень. В противном случае требуется проверка найденных решений или оценка знака обеих частей уравнения. Но существуют и другие приемы, которые могут оказаться более эффективными при решении иррациональных уравнений. Например, метод тригонометрической подстановки.

**Пример 1.**  Решите уравнение

 [12].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как , то . Поэтому можно положить . Уравнение примет вид

.

Положим , где , тогда

.

.

.

Ответ: .

## *Алгебраическое решение*

.

Так как , то . Значит, , поэтому можно раскрыть модуль



.

Ответ: .

Решение уравнения алгебраическим способом требует хорошего навыка проведения тождественных преобразований и грамотного обращения с равносильными переходами. Но в общем оба приема решения равноценны.

**Пример 2**. Решите уравнение

 [14].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Область определения уравнения задается неравенством , что равносильно условию , тогда . Поэтому можно положить . Уравнение примет вид



.

Так как , то . Раскроем внутренний модуль

.

Положим , тогда



.

Условию  удовлетворяют два значения  и .

.





.

Ответ: .

*Алгебраическое решение*



.

Возведем в квадрат уравнение первой системы совокупности, получим

.

Пусть , тогда . Уравнение перепишется в виде

.

Проверкой устанавливаем, что  – корень, тогда делением многочлена  на двучлен получаем разложение правой части уравнения на множители

.

От переменной  перейдем к переменной , получим

.

Условию  удовлетворяют два значения

.

Подставив эти значения в исходное уравнение, получаем, что  – корень.

Решая аналогично уравнение второй системы исходной совокупности, находим, что  тоже корень.

Ответ: .

Если в предыдущем примере алгебраическое решение и решение с помощью тригонометрической подстановки были равноценны, то в данном случае решение подстановкой выгоднее. При решении уравнения средствами алгебры приходится решать совокупность из двух уравнений, то есть дважды возводить в квадрат. После этого неравносильного преобразования получаются два уравнения четвертой степени с иррациональными коэффициентами, избавиться от которых помогает замена. Еще одна трудность – проверка найденных решений подстановкой в исходное уравнение.

**Пример 3**. Решите уравнение

 [31].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как , то . Заметим, что отрицательное значение неизвестного не может быть решением задачи. Действительно, преобразуем исходное уравнение к виду

.

Множитель в скобках в левой части уравнения положительный, правая часть уравнения тоже положительная, поэтому множитель  в левой части уравнения не может быть отрицательным. Вот почему , тогда , поэтому можно положить  Исходное уравнение перепишется в виде

.

Так как , то  и . Уравнение примет вид

.

Пусть . Перейдем от уравнения к равносильной системе

.

Числа  и  являются корнями квадратного уравнения

.

.

Ответ: .

## *Алгебраическое решение*

#### Возведем обе части уравнения в квадрат

.

Введем замену , тогда уравнение запишется в виде





.

Второй корень является лишним, поэтому рассмотрим уравнение





.

Так как , то .

Ответ: .

В данном случае алгебраическое решение в техническом плане проще, но рассмотреть приведенное решение с помощью тригонометрической подстановки следует обязательно. Это связано, во-первых, с нестандартностью самой подстановки, которая разрушает стереотип, что применение тригонометрической подстановки возможно лишь, когда . Оказывается, если  тригонометрическая подстановка тоже находит применение. Во-вторых, представляет определенную трудность решение тригонометрического уравнения , которое сводится введением замены к системе уравнений. В определенном смысле эту замену тоже можно считать нестандартной, а знакомство с ней позволяет обогатить арсенал приемов и методов решения тригонометрических уравнений.

Пример 4. Решить уравнение

 [4].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как переменная  может принимать любые действительные значения, положим . Тогда

,

,так как .

Исходное уравнение с учетом проведенных преобразований примет вид





.

Так как , поделим обе части уравнения на , получим

.

Пусть , тогда . Уравнение примет вид

.

.

Учитывая подстановку , получим совокупность из двух уравнений

.

Решим каждое уравнение совокупности по отдельности.

1) .

.

 не может быть значением синуса, так как  для любых значений аргумента.



.

Откуда

.

Так как  и правая часть исходного уравнения положительна, то . Из чего следует, что .

2) .

.

Это уравнение корней не имеет, так как .

# Итак, исходное уравнение имеет единственный корень

.

Ответ: .

*Алгебраическое решение*

Данное уравнение легко «превратить» в рациональное уравнение восьмой степени возведением обеих частей исходного уравнения в квадрат. Поиск корней получившегося рационального уравнения затруднен, и необходимо обладать высокой степенью изобретательности, чтобы справиться с задачей. Поэтому целесообразно знать иной способ решения, менее традиционный. Например, подстановку , предложенную И. Ф. Шарыгиным [57].

Положим , тогда



Преобразуем правую часть уравнения :

.

С учетом преобразований уравнение  примет вид

.

Введем замену , тогда

.

Второй корень является лишним, поэтому , а .

Ответ: .

##### Если заранее не известна идея решения уравнения , то решать стандартно возведением обеих частей уравнения в квадрат проблематично, так как в результате получается уравнение восьмой степени , найти корни которого чрезвычайно сложно. Решение с помощью тригонометрической подстановки выглядит громоздким. Могут возникнуть трудности с поиском корней уравнения , если не заметить, что оно является возвратным. Решение указанного уравнения происходит с применением аппарата алгебры, поэтому можно сказать, что предложенное решение является комбинированным. В нем сведения из алгебры и тригонометрии работают совместно на одну цель – получить решение. Также решение указанного уравнения требует аккуратного рассмотрения двух случаев. Решение заменой технически проще и красивее, чем с помощью тригонометрической подстановки. Желательно, чтобы учащиеся знали такой способ замены и применяли его для решения задач.

Подчеркнем, что применение тригонометрической подстановки для решения задач должно быть осознанным и оправданным. Использовать подстановку целесообразно в тех случаях, когда решение другим способом сложнее или вовсе невозможно. Приведем еще один пример, который, в отличие от предыдущего, проще и быстрее решается стандартным способом.

**Пример 5**. Решить уравнение

 [51].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как переменная  может принимать любые действительные значения, можно положить . Уравнение примет вид

.

В силу того, что , можно раскрыть модуль



.

Так как , то .

Ответ: .

## *Алгебраическое решение*

Проверкой убеждаемся, что  – корень.

Ответ: .

1.2 Рациональные уравнения

Тригонометрическая подстановка применяется при решении рациональных уравнений, когда уравнение не имеет рациональных корней или найденные рациональные решения не исчерпывают всего множества решений уравнения.

При решении иррациональных уравнений возможность введения тригонометрической подстановки была видна по структуре уравнения. В нескольких следующих задачах применение метода тригонометрической подстановки не так очевидно. Вот почему прежде чем ввести подстановку, нужно доказать законность такого введения.

**Пример 1.** Сколько корней имеет уравнение

 [37].

Решение этой задачи любым методом начинается одинаково. Докажем, что все корни данного уравнения принадлежат промежутку . Действительно, если

.

Но тогда в исходном уравнении слева стоит произведение больше восьми, а справа единица, что невозможно.

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Положим . Тогда каждому корню  исходного уравнения будет соответствовать ровно один корень , где . Наоборот, каждому корню  уравнения соответствует ровно один корень исходного уравнения. Таким образом, задача может быть переформулирована так: сколько корней на промежутке  имеет уравнение

.

Так как  и , то можно взять . Заметим, что если  - корень данного уравнения, то и  тоже корень. Вот почему достаточно рассмотреть , то есть отыскать только положительные решения. С учетом выше изложенного исходное уравнение перепишется в виде





.

Так как , то можно обе части равенства умножить на , получим



.

Ответ: шесть корней.

## *Алгебраическое решение*

# Так как выражение от правой части равенства четное и и , выясним вопрос о наличии корней на промежутке . Проверкой устанавливаем, что – корень. Рассмотрим функции от правой и левой частей уравнения, то есть функции и . Так как



и функция  непрерывна на числовой прямой, то найдутся такие значения  и , что . Поэтому на промежутке  уравнение имеет три корня, а на всей числовой прямой – шесть корней.

Ответ: 6 корней.

В данном случае можно решать любым способом, но если количество корней на небольшом промежутке достаточно велико, вычисления могут оказаться громоздкими, и сам метод неэффективным. В этом случае на помощь приходит метод тригонометрической подстановки. Надо заметить, что решить вопрос о количестве корней можно с помощью производной, но в данном случае такое решение мало эффективно, так как затруднительно найти нули производной.

**Пример 2**. Решить уравнение

.

Если для выше приведенных задач не удается найти нетрадиционный путь решения, то все равно остается вероятность справиться с задачей с помощью стандартных школьных рассуждений, правда, затратив при этом гораздо больше времени. Эта задача лишает такого выбора, так как ее решение другим способом не представляется возможным.

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Поделим все члены уравнения на 2. Уравнение примет вид

.

Докажем, что все корни данного уравнения по модулю не превосходят единицы. Пусть , тогда . Получили, что при  левая часть уравнения по модулю больше единицы, а правая – меньше единицы, что невозможно.

Положим . Уравнение примет вид

.

Условию  удовлетворяют три значения

.

Поскольку кубическое уравнение не может иметь больше трех различных корней, то мы нашли все решения.

Ответ: . **1.3 Показательные уравнения**

Приведем пример задания, решить которое без введения тригонометрической подстановки не представляется возможным.

**Пример 1.** Решить уравнение .

Пусть , тогда уравнение перепишется в виде

.

Введем замену , получим

.

Это уравнение мы уже решали[[1]](#footnote-2). Его корни

.

Два последних значения меньше нуля, поэтому нам подходит только . Перейдем к переменной , а затем к переменной 

.

Ответ: .

**§2. Решение систем**

В данном параграфе предложены системы повышенной сложности, решить которые, не зная специальных методов решения, сложно.

**Пример 1**. Решить систему уравнений

 [3].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как квадрат суммы чисел  и равен единице, то каждое из этих чисел по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Поэтому можно положить  Второе уравнение системы примет вид

.

Условию  удовлетворяют четыре значения

.

 .

 .

 .

 .

Ответ: ; ; ; .

## *Алгебраическое решение*



.

Пусть , тогда . Имеем







.

Подберем  так, чтобы многочлен, стоящий в правой части равенства, стал полным квадратом. Для этого он должен иметь один двукратный корень, то есть

.

Подбором находим, что  является корнем уравнения

.

Подставим  в уравнение , после чего оно примет вид

.

Перейдем к переменной 



Подставив получившиеся значения переменной  во второе уравнение системы, найдем соответствующие значения переменной 



Ответ: ; ; ; .

**Пример 2**. Сколько решений имеет система уравнений

[18].

Здесь представлена так называемая циклическая система уравнений. Подобные системы часто предлагаются на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике [30]. Решить эти системы, не зная специальных методов решения, очень сложно. В данном случае подбором устанавливается решение . Попытки доказать, что система не имеет других решений, положительных результатов не дают. Неоценимую помощь в решении такого класса задач оказывает метод тригонометрической подстановки.

Перепишем систему в виде

.

Докажем, что все числа  по абсолютной величине не превосходят единицы. Пусть  – максимальное из чисел  и , то . Пришли к противоречию. Если число  – минимальное и , то . Опять пришли к противоречию. Итак .

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Положим . Тогда , , . Число решений исходной системы равно числу решений уравнения

.

Условию  удовлетворяет 27 решений

.

Ответ: .

*Алгебраическое решение*

Выразим переменную 



.

Выяснить количество корней полученного уравнения с помощью производной или другим способом чрезвычайно трудно, поэтому в данном случае самый эффективный способ решение – решение с помощью тригонометрической подстановки.

**§3. Доказательство неравенств**

Как правило, навыки решения и доказательства неравенств, за исключением квадратичных, формируются на более низком уровне, чем уравнений. Эта особенность имеет объективную природу: теория неравенств сложнее теории уравнений. Тем не менее, многие приемы и методы решения неравенств совпадают с приемами и методами решения уравнений. В том числе, к доказательству неравенств применим метод замены переменной. При этом замена переменных, входящих в неравенство, с одной стороны, сокращает число переменных, а с другой, позволяет привести неравенство к виду, более удобному для исследования его свойств.

**Пример 1.**  Доказать, что  [43].

При  неравенство верное.

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Для любых  найдется угол , что . Исходное неравенство примет вид

.

Так как , то . Умножим обе части неравенства на , получим







.

Второй множитель всегда положительный, а первый не превосходит 0, поэтому все произведение не положительно.

Алгебраическое решение

Выполним решение с помощью тождественных преобразований. Для этого рассмотрим разность









.

Оба решения по простоте реализации не уступают друг другу. Решение с помощью тригонометрической подстановки может быть дано как один из возможных способов решения.

Пример 2. Известно, что . Доказать, что  [9].

Решение с помощью тригонометрической подстановки

Так как сумма квадратов  и  равна единице, то каждое из чисел  и  по абсолютной величине не превосходит единицы, и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Поэтому законна подстановка

.

Аналогично . Доказываемое неравенство запишется в виде

.

Алгебраическое решение

Алгебраическое решение в данном случае будет состоять в возведении обеих частей неравенства в квадрат и выполнении тождественных преобразований.





.

Обычно неравенство  при заданных условиях доказывается, когда изучаются приложения комплексных чисел. Но еще до изучения комплексных чисел оно может быть рассмотрено с учащимися, причем доказательство с помощью тригонометрической подстановки довольно компактно. Единственное, на что в данном случае следует обратить внимание учащихся – полное обоснование введения подстановки.

**Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.**

Задачи, связанные с поиском наибольшего и наименьшего значений функции, неспроста пользуются большой популярностью у составителей экзаменационных заданий: чтобы решить подобную задачу, приходится комбинировать приемы и методы из весьма различных разделов школьного курса математики. Первое, что приходит в голову при решении подобных задач, – исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. Но у такого подхода есть недостаток: во многих задачах вступительных экзаменов в вузы с повышенными требованиями по математике этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. В условиях конкурса этот недостаток особенно ощутим. Часто, однако, удается избавиться от громоздких выкладок, применяя понятия и навыки из других разделов школьного курса математики. Например, из тригонометрии.

**Пример 1.** Найти наибольшее и наименьшее значение выражения  в области

 [25].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Уравнение  преобразуем так, чтобы в левой части получилась сумма квадратов: . Следовательно, каждое из выражений  и  по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Положим . Выразим  через одну величину :

.

Ответ: наибольшее значение равно , наименьшее значение равно .

***Алгебраическое решение***

Уравнение  преобразуем так, чтобы в левой части получилась сумма квадратов: . Нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения выражения  в точках окружности , то есть окружности с центром в точке  и радиусом . Пусть в точке с координатами  выражение  принимает наибольшее значение, тогда справедлива система

****

****.

Так как ищем наибольшее значение выражения , то выбираем

.

.

Тогда наибольшее значение выражения  равно

.

Аналогично находим, что наименьшее значение выражения равно

.

Ответ: наибольшее значение равно , наименьшее значение равно .

**Пример 2**. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения , если  [24].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Уравнение  преобразуем так, чтобы в левой части получилась сумма квадратов:

.

Имеем, что сумма квадратов  и  равна единице, поэтому каждое из этих выражений по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Вот почему можно положить . Выразим сумму квадратов  через одну величину :

.

Ответ: наименьшее значение , наибольшее значение .

*Алгебраическое решение*

Иногда уравнения с параметрами возникают при решении задач, казалось бы, не имеющих к ним никакого отношения. Если требуется найти, например, наименьшее значение функции , ответ можно получить, если найти множество всех ее значений. Хотя это и более общая задача, но ее решение оказывается более простым. Причем число  будет значением функции  тогда и только тогда, когда уравнение  имеет хотя бы один корень. Поэтому требуется найти все такие значения параметра  и среди них выбрать наименьшее число. Это число и будет наименьшим значением функции  [37]. Реализуем сказанное для решения данной задачи другим способом.

Перейдем к системе

,

то есть выясним, при каких значениях параметра  система имеет решения. Умножим второе уравнение на  и вычтем полученное уравнение из первого.

.

Получили однородное уравнение относительно переменных  и . Проверкой устанавливается, что при  система решений не имеет, поэтому уравнение можно разделить на 

.

Чтобы это уравнение имело решения необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен.

.

Итак, данная система равносильна системе

.

Покажем, что при  система имеет решения. Пусть  - корень первого уравнения, тогда  подставим во второе уравнение

.

Обратим внимание на то, что в промежутке  только положительные числа, значит, полученное уравнение имеет решения. Соответственно, имеет решение и вся система. Промежуток  и есть множество значений, принимаемых выражением  при условии, что

.

В данном случае решение с помощью тригонометрической подстановки проще как в техническом, так и в идейном смысле. Не зная заранее идеи второго способа, трудно догадаться свести задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значений выражения к решению системы с параметром.

**Пример 3**. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения, если  [16].

Как в предыдущем примере, в этом случае самый удобный подход – тригонометрическая подстановка. Решение системы, состоящей из двух неравенств и одного уравнения с параметром, довольно сложно.

***Решение с помощью тригонометрической подстановки***

Положим . Геометрический смысл такой замены: для каждой точки  кольца  определяются расстояние  до начала координат и угол наклона вектора  к положительному направлению оси абсцисс. Тогда неравенство  будет выполнено при . Произведем замену в данном выражении

=.

Так как множество значений выражения  – это отрезок , то множество значений выражения  – отрезок.

Ответ: наименьшее значение , наибольшее значение 3.

**Пример 4**. Среди всех решений системы

 [42].

Найдите такие, при которых выражение  принимает наибольшее значение.

Перепишем систему в виде



Так как сумма квадратов чисел  и  рана единице, то каждое из них по абсолютной величине не превосходит единицы, поэтому их можно рассматривать как синус и косинус некоторого аргумента. Вот почему будет законна подстановка . Аналогично обосновывается введение замены . Тогда неравенство системы перепишется в виде

 

 .

Запишем выражение  в виде

.

Наибольшее значение выражения  достигается тогда и только тогда, когда



Найдем 

### .

.

.

.

Ответ: .

**Алгебраическое решение**

Перепишем исходную систему в виде

.

Сложим равенства полученной системы

.

Сравним левые и правые части получившегося равенства и неравенства системы, получим





.

Рассмотрим квадрат выражения 

.

Наибольшее значение выражения , а значит, наибольшее значение выражения  имеет место тогда и только тогда, когда , то есть . Можно записать

.

Подставим полученное выражение  в первое уравнение исходной системы и найдем 

.

Так как необходимо найти наибольшее значение выражения  и  и  имеют одинаковый знак, то выбираем

.

.

Так как , то .

.

Ответ: .

Здесь решение с помощью тригонометрической подстановки компактнее, быстрее приводит к результату. Единственный и важный момент, на который следует указать учащимся, является необходимость обоснования введения тригонометрической подстановки. Тот факт, что, например,  и  по модулю не превосходят единицы, можно проиллюстрировать графически. Уравнение  задает окружность с центром в начале координат и радиуса *2*.

Из рисунка видно, что  и  принимают значения из отрезка , тогда  и  изменяются на отрезке .

2

2

*а*

*b*

0

**Решение задач с параметрами**

0

Решение задач с параметрами – один из труднейших разделов школьного курса математики. Здесь, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений или неравенств, приходится думать об удачной классификации, следить за тем, чтобы не пропустить много тонкостей. Уравнения и неравенства с параметрами – это тема, на которой проверяется подлинное понимание учеником материала. Поэтому, например, на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике уравнения и неравенства с параметрами часто включают в варианты письменных работ.

**Пример 1**.Решите и исследуйте уравнение

[45].

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Так как  , то , поэтому положим . Уравнение примет вид

.

Если , то данное уравнение корней не имеет.

Пусть . Так как , то . При этих значениях  имеем

.

То есть для того чтобы уравнение имело корни необходимо и достаточно, чтобы

.

Значит, если , то данное уравнение корней не имеет.

Пусть , то есть . Отсюда . Тогда данное уравнение имеет один корень

.

Если , то исходное уравнение имеет два корня

.

,.

Ответ: Если  или , то данное уравнение корней не имеет.

Если , то уравнение имеет единственный корень .

Если , то уравнение имеет два корня .

###### Алгебраическое решение

.

Пусть . Выясним, при каких значениях  выполняется неравенство , то есть решим неравенство



.

Пусть , тогда рассмотрим неравенство



.

Ответ: Если  или , то данное уравнение корней не имеет.

Если , то уравнение имеет единственный корень .

Если , то уравнение имеет два корня .

В данном случае оба решения равноценны, можно решать любым способом. Зато уже в следующем примере решение с помощью тригонометрической подстановки проще.

**Пример 2.** При каких *а* неравенство



имеет решение [13].

Неравенство  имеет решение при *а* большем наименьшего значения выражения .

*Решение с помощью тригонометрической подстановки*

Положим , тогда



, где .

Оценим выражение 







.

Наименьшее значение выражения равно . Значит, при  неравенство имеет решение.

Ответ: при  неравенство имеет решение.

*Алгебраическое решение*

Если , то неравенство примет вид

.

Значит, при  неравенство имеет решение.

Поделим числитель и знаменатель на , получим

****.

Введем замену , тогда

.

Найдем наименьшее значение выражения .



.

То есть наименьшее значение выражения  равно . Тогда наименьшее значение выражения , а значит наименьшее значение выражения  равно .

Ответ: при  неравенство имеет решение.

Для данного задания самый удобный метод решения – решение с помощью тригонометрической подстановки. Во втором случае возникает проблема с тем, чтобы найти наименьшее значение выражения . Если учащиеся умеют находить наименьшее значение функции с помощью производной, то выполнив все вычисления и проведя исследование, они справятся с задачей. Если подобное задание решать до изучения производной, то могут возникнуть трудности с определением наименьшего значения. В работе предложен прием сведения к уравнению с параметром, подробно описанный в предыдущем параграфе.

1. Пример 2 пункта 1.2 Рациональные уравнения [↑](#footnote-ref-2)